CAPITOLO 5

TEORIA DELLA RELATIVITÀ SPECIALE

"La teoria da svilupparsi si fonda - come ogni altra elettrodinamica - sulla cinematica dei corpi rigidi, poiché le affermazioni di una tale teoria riguardano relazioni tra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi e processi elettromagnetici. La non sufficiente considerazione di queste circostanze è la radice delle difficoltà, con le quali l'elettrodinamica dei corpi in movimento attualmente deve lottare"

A. Einstein, 1905.

12/03/2019 13:56:54

CARATTERI 38900

TEORIA DELLA RELATIVITÀ SPECIALE

5.1. Il punto della situazione agli inizi del novecento

Agli inizi del novecento la situazione in fisica era la seguente: si credeva nell'esistenza di uno spazio assoluto e di un tempo assoluto, indipendenti l'uno dall'altro, entrambi isotropi ed omogenei. Si credeva inoltre che lo spazio fosse euclideo. Valevano la relatività galileiana e le trasformazioni galileiane; e valevano i principi della dinamica di Newton.

I sistemi a molte particelle erano descritti dalle leggi della termodinamica. Grazie alla termodinamica inoltre era definita la direzione dei fenomeni naturali: il tempo.

Due sole erano le forze (interazioni) conosciute: quella gravitazionale e quella elettromagnetica (quest'ultima nata dalla unificazione dell'interazione elettrica e di quella magnetica a opera di Maxwell)

Le leggi della fisica erano deterministiche, o probabilistiche per i sistemi complicati. Per definire lo stato di un sistema semplice era necessario sapere la sua posizione, la velocità, la massa e la carica elettrica.

L'ottimismo di molti fisici sul fatto che oramai erano state gettate le basi di tutta la fisica era tale che Lord Kelvin nel 1900 dichiarò in un famoso discorso "*Adesso non c'è niente di nuovo da essere scoperto in fisica. Tutto quello che rimane sono misure sempre più precise*"[1]. Tuttavia i problemi irrisolti non erano di poco conto, alcune cose non tornavano. Nella prima metà del XX secolo nascono due (tre) nuove teorie, per rendere conto di questi problemi: le (due) teorie della relatività e la meccanica quantistica.

Le teorie della relatività furono pubblicate da Albert Einstein in due anni precisi: nel 1905 viene pubblicata la teoria della relatività speciale (o teoria della relatività ristretta) e nel 1916 la teoria della relatività generale.

La teoria della relatività speciale affronta due problemi che riguardavano la luce ed i fenomeni elettromagnetici legati ai corpi in movimento: il risultato dell'esperimento di Michelson e Morley (1887), e alcune asimmetrie nell'elettromagnetismo.

5.1.1. **Il problema della velocità della luce: l'esperimento di Michelson e Morley**

Secondo le leggi della fisica classica le velocità si sommano passando da un sistema di riferimento in moto ad un altro. Cioè se io mi trovo su di un nastro trasportatore e cammino con una velocità di 2 metri al secondo, e il nastro trasportatore si muove rispetto al terreno con una velocità di 3 metri al secondo, un osservatore solidale con il terreno mi vedrà muoversi con una velocità di 2+3= 5 metri al secondo. La somma classica delle velocità dovrebbe valere anche per la velocità della luce quando questa viene emessa da un sistema che si muove, per esempio da una persona che sta sulla terra (che si muove a grande velocità intorno al Sole).

Nella seconda metà dell'800 Maxwell e collaboratori avevano misurato e predetto correttamente il fatto che la luce fosse un segnale e.m. e che si propagava a grandissima velocità, ma rimaneva il problema di stabilire quale fosse il mezzo che trasportava quest'onda. Il punto era questo: qualunque onda trasporta energia, e mentre l'onda viaggia questa energia si trova nel mezzo che trasporta l'onda.

Il suono, una volta emesso, viaggia nell'aria e l'energia dell'onda sonora viene trasmessa attraverso il movimento delle molecole di aria. Un'onda del mare viene trasmessa attraverso l'acqua, che trasporta l'energia dell'onda. Quindi, per analogia, anche l'onda e.m. avrebbe dovuto essere trasportata da un mezzo: quale?

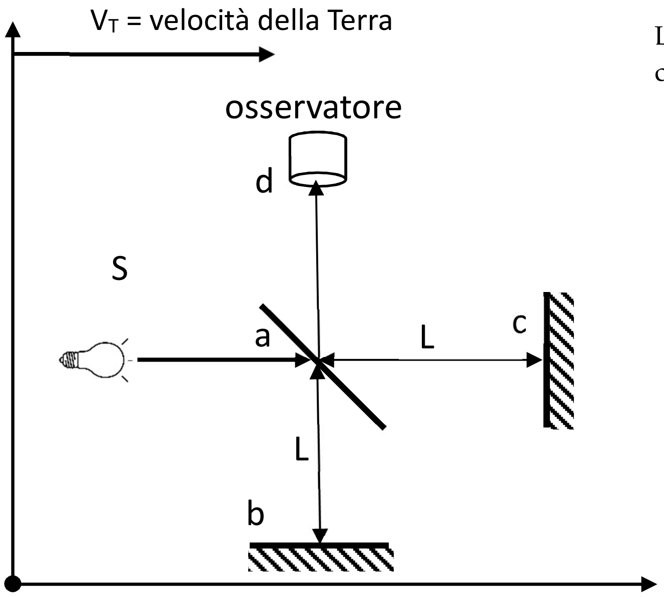
L'ipotesi di Maxwell e collaboratori era che la luce venisse trasportata un mezzo chiamato *etere luminifero*, e che questo etere fosse immobile, solidale con lo spazio assoluto. Di conseguenza si sosteneva che ogni corpo in movimento fosse sottoposto ad un "vento d'etere" che si muoveva rispetto al corpo alla stessa sua velocità, ma con direzione opposta. Come quando siamo su di una bicicletta e sentiamo il vento contro di noi. Dal nostro punto di vista è come se noi fossimo fermi e fossimo immersi in un vento che si muove contro di noi. Ora, se la luce viaggia nell'etere e l'etere coincide con lo spazio assoluto, noi che siamo sulla Terra, in movimento rispetto all'etere, dovremmo misurare una velocità per la luce che si somma o si sottrae alla

[1] Lord Kelvin: *Address to the British Association for the Advancement of Science* (1900).

velocità della Terra che sta ruotando intorno al Sole[2]. Questo era quello che predicevano le relazioni di Galileo sulla somma delle velocità in sistemi inerziali.

Nel 1887 Albert Abraham Michelson e Edward Morley realizzano un esperimento per misurare questo "vento d'etere" rispetto ad un osservatore sulla Terra. Se la luce si propaga attraverso l'etere, deve essere possibile rilevare la differenza della velocità della luce nella stessa direzione del vento d'etere, rispetto alla direzione opposta.

Utilizzando un interferometro, Michelson e Morley lanciano un fascio di luce una volta nel senso di rivoluzione della terra, una volta in senso contrario, e perpendicolarmente, poi fanno interferire (sommano) i due raggi di luce. Questo apparato permette di rivelare la differenza nel tempo di arrivo di due raggi di luce identici (con la stessa frequenza). Il valore previsto dalla teoria era circa 40 volte quello minimo rivelabile. Michelson e Morley fanno l'esperimento, lo ripetono più volte con un apparato sempre più sensibile ed il risultato è sempre lo stesso: non vedono alcuna differenza nella velocità della luce! Le formule della relatività galileiana non funzionano.



Sistema di riferimento solidale con il laboratorio

La luce fa due percorsi: 1 (Sacad) e 2 (Sabad) che hanno tutti la stessa lunghezza.

$$t(ac) = \frac{L}{c - V_T} \quad ; \quad t(ca) = \frac{L}{c + V_T}$$

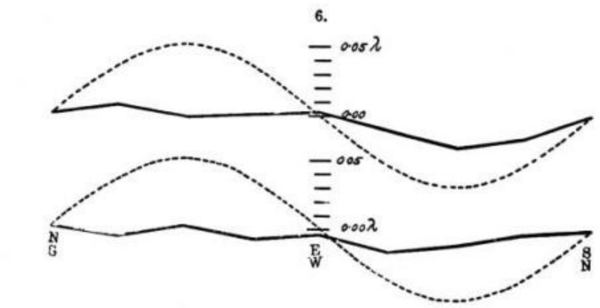
$$t(ab) = t(ba) = \frac{L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - V_T^2/c^2}}$$

$$\begin{cases} t'(aca) = \dfrac{2L}{c} \cdot \dfrac{1}{1 - V_T^2/c^2} \\ t''(aba) = \dfrac{2L}{c} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - V_T^2/c^2}} \end{cases}$$

Fig. 5.1 L'esperimento di Michelson e Morley (1887). Il laboratorio si trova sulla Terra, quindi rispetto allo spazio assoluto si muove con velocità V_T. Una sorgente S emette un raggio di luce. In **a** la luce incontra uno specchio semiargentato, che fa passare metà della luce (verso **c**) e ne riflette l'altra metà (verso **b**). La luce che arriva in **c** (uno specchio) viene riflessa, torna in **a**, viene deviata ed arriva in **d**. La luce che arriva in **b** (uno specchio) viene riflessa, arriva in **a**, prosegue e arriva in **d** dove si somma alla luce proveniente dall'altro percorso; i due raggi percorrono esattamente lo stesso cammino. In **d** si pone un rivelatore di luce che misura l'intensità della luce somma dei due raggi. Se il tempo di arrivo è differente, quindi se la velocità dei due raggi è differente, come era previsto dalla teoria, allora il rivelatore di luce deve vedere una variazione dell'intensità luminosa dovuta al fenomeno dell'interferenza fra i due raggi luminosi.

---

[2] La Terra si muove intorno al Sole con una velocità media di circa 30 km/s ed ha anche un movimento di rotazione intorno a sé stessa, ma la velocità del suo moto di rotazione è, alle latitudini medie dell'Italia, circa 100 volte minore di quella di rivoluzione, e quindi può essere trascurata.



Il risultato sperimentale[3]: in orizzontale c'è la direzione dell'apparato rispetto alla Terra (NS, EW, SN), in verticale l'ampiezza del segnale proporzionale al ritardo di arrivo dei due raggi luminosi. La linea continua è il risultato della misura. La linea tratteggiata è **otto volte più piccola** del risultato previsto calcolato utilizzando le formule della relatività galileiana.

Fig. 5.2 Il risultato pubblicato da Michelson e Morley[3]. L'apparato sperimentale veniva ruotato rispetto all'asse Nord-Sud per verificare che i due cammini **ac** e **ab** (fig. 5.1) fossero effettivamente uguali.

Il risultato sperimentale non è ambiguo[4], le ipotesi sono queste: 1) Le misure sono sbagliate. 2) I calcoli sono sbagliati. 3) il modello è sbagliato, cioè la luce non obbedisce alla legge classica di composizione delle velocità. Le misure furono ripetute con apparati diversi, era molto improbabile che fossero tutte sbagliate. I calcoli in realtà sono molto semplici, è facile controllare che non sono sbagliati. Quindi rimaneva l'ipotesi che il modello fosse sbagliato. Ma non era banale ipotizzare che le formule della relatività galileiana non fossero corrette.

5.1.2. Spire, magneti e correnti indotte

Il secondo esperimento che preoccupava A. Einstein è quello del magnete, della spira conduttrice, e delle correnti indotte dal movimento relativo dei due sistemi. L'esperimento consiste nel considerare due oggetti – un magnete ed una spira che si muovono con velocità costante V uno rispetto all'altro (vedi figura 5.3). In questo caso posso porre l'osservatore, cioè il mio sistema di riferimento, sulla spira (Bob), oppure sul magnete (Alice). La scelta è indifferente dato che i due sistemi sono entrambi inerziali. Quello che succede è che, per il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, si genera una corrente elettrica che circola nella spira fintanto che ci sarà una velocità diversa da zero fra i due sistemi. Le formule che seguono sono un po' complicate, non serve capirne la parte formale.

Poniamo il caso di Alice, quindi di un osservatore solidale con il magnete. Se muovo la spira – che ha una resistenza elettrica R - rispetto al magnete, nella spira passerà una corrente *i*:

$$i = \frac{f}{R};\ \ f = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\oint \bar{v} \times \bar{B} \cdot d\bar{l}$$ dove $\bar{E}$ è il campo elettrico che nasce dalla forza di Lorentz

generata che agisce sulle cariche elettriche – quelle che stanno dentro la spira – che si muovono con velocità v rispetto al campo B creato dal magnete.

Poniamo ora il caso di Bob, quindi di un osservatore solidale con la spira. Se muovo il magnete rispetto alla spira, nella spira passerà una corrente i:

---

[3] A. A. Michelson e E. W. Morley, *American Journal of Science*, 1887, 34.

[4] L'esperimento è stato ripetuto varie volte con sensibilità sempre maggiore. Uno degli ultimi è: H. Muller et al., Modern Michelson-Morley Experiment Using Cryogenic Optical Resonators, Phys. Rev. Lett. 91, 20401 (10.3.2003) in cui il limite nella costanza della velocità della luce fu $\Delta c/c \leq 3 \cdot 10^{-15}$.

$i = \frac{f}{R};\ \ f = -\frac{d\phi(B)}{dt}$ dove $\phi(B)$ è il flusso del campo B attraverso la superficie della spira.

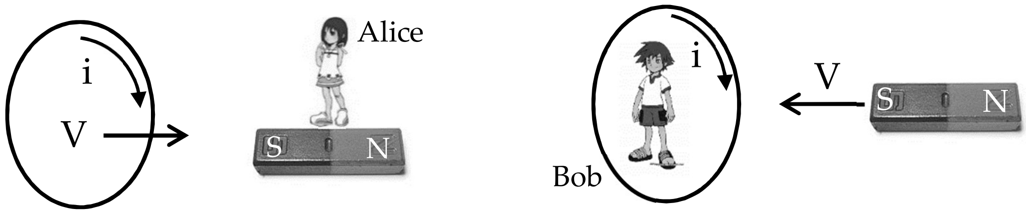


Fig. 5.3 L'esperimento del magnete e della spira. Ho un magnete che si muove con velocità costante V rispetto ad una spira. Secondo le teorie dell'elettromagnetismo i due osservatori (Alice a Bob) devono utilizzare formule differenti per calcolare la corrente i che scorre nella spira. Che è la stessa per entrambi gli osservatori.

Il punto è che la corrente *i* risulta la stessa per i due casi, sia come risultato del calcolo che sperimentalmente. Nei due casi devo utilizzare due formule diverse per calcolare la stessa corrente i, in realtà ho sempre e solo un movimento relativo del magnete rispetto alla spira. Secondo la relatività galileiana se ho dei sistemi che si muovono uno rispetto all'altro con velocità costante, le leggi della fisica devono rimanere le stesse: devo poter utilizzare le stesse formule.

Se devo però usare formule diverse per calcolare la stessa corrente nei due casi, allora c'è un'asimmetria che non dovrebbe esserci. E questo è un problema.

5.2. La teoria della relatività speciale

Ecco l'introduzione dell'articolo originale di A. Einstein del 1905, nel titolo non c'è la parola "relatività", si parla dell'elettrodinamica dei corpi in movimento, cioè dei punti che non tornavano che abbiamo appena discusso.

L'Elettrodinamica dei Corpi in Movimento

Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik **17**, 891-921 (1905).

A. Einstein

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettro-magnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti. Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che - a parità di moto relativo nei due casi considerati - dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica.

Esempi di tipo analogo, come pure i tentativi andati a vuoto di constatare un moto della terra relativamente al "mezzo *luminoso" portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, e che inoltre per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche, come già è dimostrato per le quantità del prim'ordine.*

Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato "principio di relatività ") come postulato, e oltre a questo introdurremo il postulato con questo solo apparentemente incompatibile, che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata V, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti. Questi due postulati bastano a pervenire ad un'elettrodinamica dei corpi in movimento semplice ed esente da contraddizioni, costruita sulla base della teoria di Maxwell per i corpi in quiete. L'introduzione di un "etere luminoso" si dimostra fin qui come superflua, in quanto secondo l'interpretazione sviluppata non si introduce uno "spazio assoluto in quiete" dotato di proprietà speciali, né si associa un vettore velocità ad un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici.

La teoria da svilupparsi si fonda - come ogni altra elettrodinamica - sulla cinematica dei corpi rigidi, poiché le affermazioni di una tale teoria riguardano relazioni tra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi e processi elettromagnetici. La non sufficiente considerazione di queste circostanze è la radice delle difficoltà con le quali l'elettrodinamica dei corpi in movimento attualmente deve lottare.

Vale la pena di sottolineare alcuni punti, ripresi dal paragrafo di cui sopra:

- *È noto che l'elettrodinamica di Maxwell… porta a delle asimmetrie, che non **paiono** essere inerenti ai fenomeni.*

Le asimmetrie della teoria non "paiono" essere legate ai fenomeni

- *Esempi di tipo analogo… portano alla **supposizione** che il concetto di quiete assoluta, non solo in meccanica ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza.*

E' sensato "supporre" che non si possa parlare di quiete assoluta, non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica.

- ***Assumeremo questa congettura** (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato "principio di relatività") **come postulato.***

Assumiamo come postulato (il primo postulato della relatività speciale) il principio di relatività per tutte le leggi della fisica.

-*… introdurremo il **postulato**… che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata V, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti.*

Assumiamo come postulato (il secondo postulate della relatività speciale) che la velocità della luce nel vuoto sia una costante.

- *Questi due postulati bastano a pervenire ad un'elettrodinamica dei corpi in movimento **semplice ed esente da contraddizioni.***

Lo scopo è costruire una teoria semplice e coerente, non si afferma che sarà l'unica…

- *L'introduzione di un "etere luminoso" si dimostra fin qui come **superflua**.*

Non si dice che l'etere non esiste, solo che non serve per descrivere la realtà.

- *La **non sufficiente considerazione** di queste circostanze è la radice delle difficoltà con le quali l'elettrodinamica dei corpi in movimento attualmente deve lottare.*

Tutti i problemi nascono nel non aver considerato con la dovuta attenzione i processi di misura delle distanze e dei tempi.

E' semplice no?

5.2.1. I due principi della relatività speciale

A. Einstein propone quindi di risolvere il problema delle asimmetrie legate al comportamento di alcuni oggetti in movimento (quelli con carica elettrica) partendo da questi due principi (i principi della relatività speciale):

1. Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento "inerziali" (cioè per tutti i sistemi che si muovono uno rispetto all'altro con velocità costante). Vale per TUTTE le leggi della fisica, non solo per la meccanica.
2. La velocità della luce nel vuoto è una costante universale[5], è indipendente dal moto del sistema che la emette e da quello che la riceve.

Da queste due assunzioni Einstein prosegue con lo scopo di riscrivere le trasformazioni di coordinate di Galileo in modo che soddisfino l'ipotesi 2.

Il percorso fatto da A. Einstein è semplice ma molto sottile. Come prima cosa viene (ri)definito il concetto di simultaneità per orologi "a riposo", quindi entrambi fermi rispetto ad un osservatore, ma situati in posti diversi.

Dall'articolo originale:

"Se vogliamo descrivere il *moto* di un punto materiale, diamo i valori delle sue coordinate in funzione del tempo. Ora si deve tenere ben in mente che una descrizione matematica siffatta ha un significato fisico solo quando si sia detto chiaramente in precedenza che cosa si intende qui per "tempo". Dobbiamo tener presente che tutte le nostre asserzioni nelle quali il tempo gioca un ruolo sono sempre asserzioni su *eventi simultanei*" (le parole in *corsivo* sono di A. Einstein).

Il caso di orologi situati nello stesso posto è banale: si dicono simultanei se entrambi segnano lo stesso tempo nello stesso istante[6].

Se invece gli orologi si trovano in posti diversi la cosa è più delicata, ecco cosa scrive Einstein:

Se nel punto A dello spazio si trova un orologio, un osservatore che si trovi in A può valutare temporalmente gli eventi nell'intorno immediato di A osservando le posizioni delle lancette dell'orologio simultanee con questi eventi. Se anche nel punto B dello spazio si trova un orologio - aggiungeremo, "un orologio esattamente con le stesse proprietà di quello che si trova in A" - allora una valutazione temporale degli eventi nell'intorno immediato di B da parte di un osservatore che si trovi in B è pure possibile. Non è possibile tuttavia, senza un'ulteriore deliberazione, confrontare temporalmente un evento in A con un evento in B; finora abbiamo definito soltanto un "tempo di A" ed un "tempo di B", ma non abbiamo definito alcun "tempo" per A e B complessivamente. Quest'ultimo tempo può essere definito soltanto quando si assuma per definizione che il "tempo" che la luce impiega per andare da A a B è uguale al "tempo" che essa impiega per andare da B ad A. Ossia, parta un raggio di luce al "tempo di A" t_A *da A verso B, sia al "tempo di B"* t_B *riflesso verso A e ritorni ad A al "tempo di A"* t'_A*. I due orologi per definizione camminano sincroni quando*

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

Assumiamo che questa definizione di sincronismo sia possibile in modo esente da contraddizioni, che quindi valgano le condizioni:

1. Quando l'orologio in B cammina sincrono con l'orologio in A, l'orologio in A cammina sincrono con l'orologio in B.

2. Quando l'orologio in A cammina sincrono sia con l'orologio in B che con l'orologio in C, gli orologi in B e C camminano in modi mutuamente sincroni.

Abbiamo così determinato con l'aiuto di certe esperienze fisiche (pensate) che cosa si debba intendere per orologi a riposo che camminano sincroni e si trovano in posti separati e con questo evidentemente abbiamo ottenuto una definizione di "simultaneo" e di "tempo". Il "tempo" di un evento è l'indicazione simultanea con l'evento di un orologio a riposo che si trova nella posizione dell'evento, che cammina sincrono con un determinato orologio a riposo, e cioè per tutte le determinazioni di tempo compiute con l'orologio stesso.

Assumiamo secondo l'esperienza che la quantità

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

sia una costante universale (la velocità della luce nello spazio vuoto).

---

[5] La velocità della luce nel vuoto, assunta come esatta, è: 299'792'458 m/s

[6] Nell'articolo originale A. Einstein inserisce questa nota: *Non si considererà qui l'imprecisione che si introduce nel concetto di simultaneità di due eventi (approssimativamente) nello stesso posto e che viene superata con l'astrazione.*

È essenziale che noi abbiamo definito il tempo mediante orologi a riposo nel sistema a riposo; chiamiamo il tempo ora definito, a motivo di questa associazione con il sistema a riposo "il tempo del sistema a riposo".

Quindi è possibile definire la simultaneità di due orologi "a riposo" solo avendo assunto che la velocità della luce sia una costante universale.

Se vogliamo definire un intervallo di tempo per un evento che avvenga in posizioni diverse da dove si trova l'osservatore e in moto rispetto a questo la cosa si fa più complicata. Einstein studia cosa misurerebbero come lunghezza di un righello rigido due osservatori, uno a riposo ed uno in moto rispetto al righello. Il risultato è il seguente:

[...] Vediamo quindi che non possiamo attribuire al concetto di simultaneità alcun significato assoluto, ma che invece due eventi che, considerati in un sistema di coordinate, sono simultanei, se considerati da un sistema che si muove relativamente a questo sistema, non si possono più assumere come simultanei.

A questo punto è chiaro che i vecchi concetti di tempo, spazio, simultaneità, lunghezze e tempi assoluti vanno rivisti.

5.3. Il risultato matematico: le trasformazioni di Lorentz

Il primo risultato, assumendo veri i postulati, è di riscrivere le trasformazioni di coordinate che fanno passare da un sistema di riferimento ad un altro in moto rispetto al primo con velocità costante ed uniforme. Vediamo le differenze fra le trasformazioni di Galileo, quelle della meccanica classica, e quelle di Lorentz, della relatività speciale[7]. Supponiamo per semplicità di considerare due sistemi di riferimento, in moto uno rispetto all'altro, in cui il secondo (O'x'y') si muova con velocità V rispetto al primo (Oxy). Vedi fig. 5.4. Il primo sistema può essere la Terra, il secondo un treno che va in linea retta con velocità costante V. Nei due sistemi ho (almeno) due orologi che misurano il tempo in ogni sistema, t nel sistema O e t' nel sistema O'. Sul treno può esserci poi un uomo fermo o in movimento la cui posizione è x rispetto al sistema O e x' rispetto al sistema O'. Le trasformazioni di coordinate di Galileo ci fornivano le espressioni di x in funzione di x' e di t in funzione di t'. Per semplicità si assume che all'istante inziale t=t'=0 i due sistemi abbiano le due origini coincidenti (O=O') e che la velocità di O' rispetto ad O sia in direzione x. Quindi si avrà sempre y=y' e z=z'.

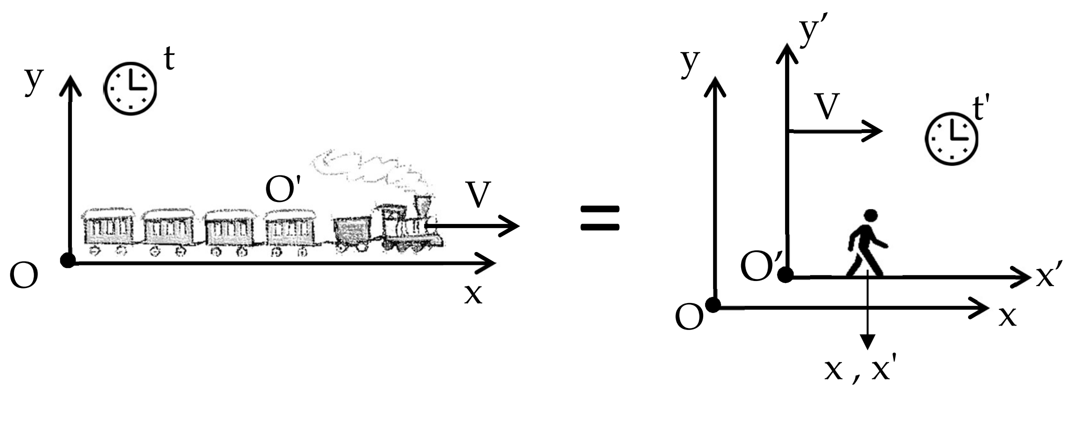


Fig. 5.4 Schema di due sistemi di riferimento, uno fermo (il sistema con origine in O) ed un altro - il treno, O' - in moto con velocità V rispetto al primo. Sul treno c'è un uomo la cui posizione è x misurata dal primo sistema, e x' misurata dal secondo. I tempi misurati da due orologi nel primo e nel secondo sistema di riferimento sono t e t'. All'istante t=t'=0 i due sistemi siano coincidenti (O=O'), nella figura di destra sono disegnati sfalsati anche secondo la y per chiarezza.

[7] Ci si può chiedere perché le trasformazioni della relatività di Einstein si chiamino trasformazioni di Lorentz. Vedi il paragrafo sulla contrazione delle lunghezze.

Ecco le trasformazioni di coordinate, quelle della meccanica classica di Galileo in cui è presente il tempo "assoluto" [t=t'], in cui i due orologi segneranno sempre lo stesso tempo. E quelle di Lorentz della relatività speciale in cui il tempo dipende anche dalla posizione e dalla velocità di un sistema rispetto all'altro.

In entrambi i casi si assume per semplicità y=y' e z=z'.

Galileo: $\begin{cases} x = x' + Vt' \\ t = t' \end{cases}$ Lorentz: $\begin{cases} x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ t = \gamma\left(t' + x'\frac{V}{c^2}\right) \end{cases}$ dove: $\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 1 \le \gamma \le \infty \end{cases}$

Nelle trasformazioni di Lorentz spazio e tempo non sono più indipendenti: la misura di uno dipende dalla misura dell'altro. Il tempo è determinato dallo spazio e lo spazio dal tempo, quindi $t \neq t'$, si supera il concetto di un tempo assoluto. Lo scorrere del tempo dipende dal sistema di riferimento, e dalla velocità dell'evento considerato rispetto a chi lo osserva.

Vediamole un momento: nelle trasformazioni di Lorentz appare un coefficiente che non esisteva in quelle di Galileo, il fattore γ. Questo è il cosiddetto fattore relativistico, ed è uguale a:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \begin{cases} V = 0 \ \rightarrow \gamma = 1 \\ V = c \ \rightarrow \gamma = \infty \end{cases} \quad \textit{quindi}: \ 1 \le \gamma \le \infty$$

Prima di vedere gli effetti fisici di queste trasformazioni vediamo come funziona il fattore γ, che ci dice quanto siano grandi gli effetti relativistici in un sistema.

Se la velocità c della luce fosse infinita il fattore γ sarebbe uguale a 1 e le trasformazioni relativistiche sarebbero identiche a quelle di Galileo, ma velocità infinita vuol dire trasmissione istantanea dei segnali, questo creerebbe ben altri problemi, inoltre sappiamo che non è vero, quindi c'è poco da discutere.

Se invece V=0, cioè per sistemi entrambi "a riposo" uno rispetto all'altro, ho sempre γ=1, le trasformazioni ridiventano quelle di Galileo per sistemi fermi uno rispetto all'altro.

La differenza si ha quindi quando il fattore γ è diverso da 1. Ma quanto deve essere diverso il fattore γ per accorgermi della differenza con un sistema descritto dalle trasformazioni di Galileo. Cioè quando è che comincerei a misurare cose diverse da quelle che calcolerei (vedremo fra poco quali possono essere)?

Ricordiamoci che l'effetto relativistico si ha quando γ comincia ad essere sensibilmente maggiore di 1.

Nella tabella 5.1 sono stati calcolati i fattori γ per alcuni "oggetti" del mondo reale. Si può vedere come per nessun oggetto macroscopico in moto sulla Terra o nel sistema solare il fattore γ è sensibilmente maggiore di 1. Anche se considerassimo il Sole che si muove rispetto al centro galattico avremo una velocità di 828'000 km/ora, quindi 230'000 m/s… che porterebbe ad un fattore γ ≅ 1,0000003, 3 decimi di milionesimo… una differenza veramente piccola, ecco perché né Galileo né altri illustri fisici non se ne erano accorti: non se ne potevano accorgere. Uno dei pochi oggetti "naturale" con massa e γ>>1 sono i raggi cosmici ed i muoni atmosferici, delle particelle cariche che vengono create dall'impatto dei raggi cosmici con l'atmosfera terrestre, ne riparleremo più in là. Ma questo fattore diventa infinito se prendiamo un segnale elettromagnetico (la luce nel vuoto), per questo le leggi dell'elettromagnetismo davano problemi: con la luce siamo in pieno regime relativistico!

Oggetto	**V(km/ora)**	**V(m/s)**	**beta= V/c**	**γ**
Laboratorio	0	0	0	1
Concorde	2.400	667	2,2E-06	1,0000000000
Aereo X15	7.300	2.028	6,8E-06	1,0000000000
Satellite GPS@26500 km	13.600	3.778	1,3E-05	1,0000000001
Terra intorno al Sole	108.000	30.000	1,0E-04	1,0000000050
Sole intorno alla galassia	828.000	230.000	7,7E-04	1,0000002939
	1.000.000	300.000	1,0E-03	1,0000005000
		3.000.000	1,0%	1,00005
		30.000.000	10%	1,00504
		90.000.000	30%	1,04828
		150.000.000	50%	1,2
	936.000.000	260.000.000	**86,7%**	**2,0**
			94,1%	3,0
			98,0%	5,0
			99,0%	7,1
			99,5%	**10,0**
Muoni atmosferici			**99,92%**	**25,0**
			99,99%	70,7
			99,995%	**100**
			99,9998%	500
Protoni LHC - CERN		299 792 455	**99,999999%**	**7071**
Luce nel vuoto		**299 792 458**	100%	∞

Tabella 5.1 Il fattore relativistico γ calcolato per alcuni sistemi reali. Il fattore β=V/c serve a dare un'idea di quanto la velocità V dell'oggetto sia vicina in percentuale rispetto alla velocità c della luce.

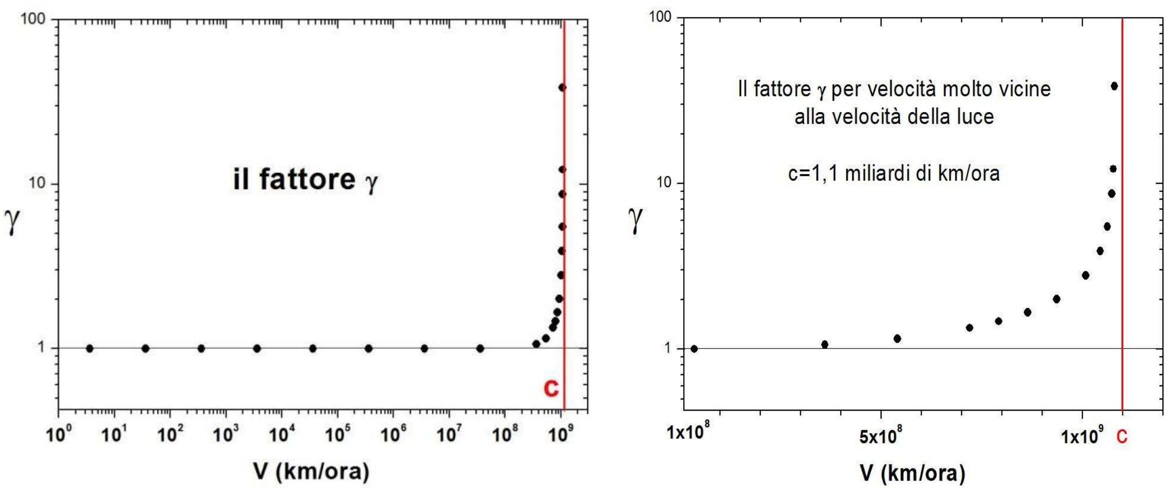


Fig. 5.5 Il fattore relativistico γ in due scale diverse. A sinistra si vede che di base è quasi sempre uguale a 1, mentre a destra si vede quando inizia ad essere sensibilmente maggiore di 1, per velocità maggiori di 500 milioni di km/h. Il fattore diventa infinito per velocità uguali a quelle della luce nel vuoto, quindi solo per segnali elettromagnetici.

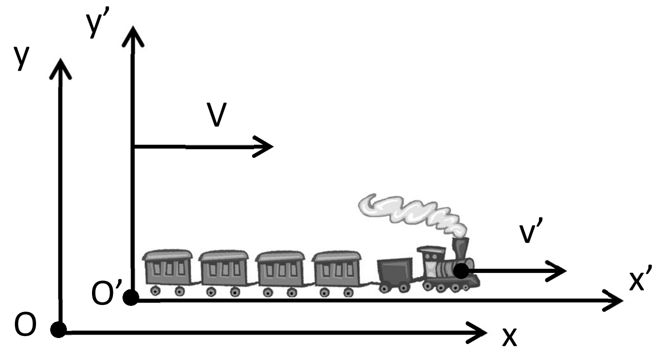
5.4. Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

Dalle trasformazioni di Lorentz seguono alcune proprietà che riguardano lo spazio, il tempo o altre grandezze fisiche misurate da un osservatore in moto rispetto ad un [oggetto, evento]:

1. Le velocità si sommano in maniera differente da quanto si facesse con le trasformazioni galileiane.
2. Le lunghezze si contraggono nella direzione del moto.
3. Gli intervalli temporali si dilatano.
4. L'ordine con cui avvengono alcuni eventi non è più determinato, esso dipende da chi li guarda.
5. Molte altre grandezze fisiche dipendono dalla velocità relativa fra l'osservatore e il sistema osservato.

5.4.1. Somma di velocità

Possiamo facilmente calcolare come funziona la somma delle velocità utilizzando le nuove trasformazioni.



$$v(\text{Lorentz}) = \frac{v' + V}{1 + v'\frac{V}{c^2}}$$

$$v(\text{Galileo}) = v' + V$$

Fig. 5.6 Il treno ha una velocità ha v' rispetto al sistema O' . Questo a sua volta si muove con velocità V rispetto al sistema O. Il treno, rispetto al sistema O, ha una velocità v che viene calcolata differentemente secondo le trasformazioni di Galileo o quelle di Lorentz.

La velocità può essere calcolata valutando la grandezza dx/dt, cioè facendo il rapporto fra un certo spazio percorso (dx) diviso per il tempo impiegato a percorrerlo (dt). Dalle trasformazioni di Lorentz abbiamo:

$$\begin{cases} x = \gamma\,(x' + Vt') & ; \quad x = \gamma x' + \gamma V t' \quad ; \quad \text{da cui:} \quad dx = \gamma dx' + \gamma V dt' \\ t = \gamma\left(t' + x'\frac{V}{c^2}\right) & ; \quad t = \gamma t' + \gamma x'\frac{V}{c^2} \quad ; \quad \text{da cui:} \quad dt = \gamma dt' + \gamma\frac{V}{c^2}dx' \end{cases}$$

Quindi la velocità v del treno, vista dal sistema O, sarà:

$$v(\text{Lorentz}) = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma V dt'}{\gamma dt' + \gamma\frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v' + V}{1 + v'\frac{V}{c^2}} \qquad \text{mentre:}\ v(\text{Galileo}) = v' + V$$

Vediamo cosa succederebbe se la velocità v' del treno diventasse uguale a quella della luce (in realtà non è possibile, ma supponiamo che lo sia, oppure che il treno sia un fotone che va a velocità c):

$\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{v}' + \mathrm{V}}{1+\mathrm{v}'\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}^2}}$ se: $\mathrm{v}' = \mathrm{c}$ allora: $\mathrm{v} = \mathrm{c}$ cioè il fotone continua ad essere visto come un oggetto

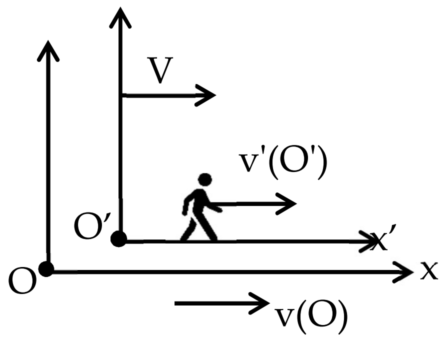
che va alla velocità della luce.

Supponiamo ora che sia il sistema di riferimento O' ad andare alla velocità della luce, quindi che V=c (trascuriamo il fatto che il treno non potrebbe trovarsi su di un sistema che va alla velocità della luce):

$\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{v}' + \mathrm{V}}{1+\mathrm{v}'\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}^2}}$ se $\mathrm{V} = \mathrm{c}$ allora $\mathrm{v} = \mathrm{c}$ quindi il treno verrebbe visto come un oggetto che va alla velocità della luce.

Vediamo ora un caso un po' più realistico, valido magari per delle particelle che possiamo accelerare a velocità prossime a quella della luce. Supponiamo di avere una particella con una velocità v' (il treno del caso precedente) rispetto ad un sistema con velocità V=0,9 c = 90% c rispetto ad un altro sistema. Quale sarà la velocità della particella vista da quest'altro sistema?

Se V = 0,9 c allora la velocità della particella, vista dal sistema O sarà: $\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{v}' + 0{,}9\ \mathrm{c}}{1 + 0{,}9\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}$ vedi la Tab. 5.2, la velocità misurata dal sistema O continua ad essere sempre minore di c, a meno che la velocità della particella o del sistema in moto non siano uguali a c, nel qual caso la velocità sarà esattamente c.
Quindi in sostanza la "somma" delle velocità, fatta tramite la relazione derivata dalle trasformazioni di Lorentz, porta ad un valore che non supera mai la velocità della luce c.



V = 0,9 c	
v'	v
0	0,9 c
0,5 c	0,96 c
0,8 c	0,988 c
0,9 c	0,994 c
0,95 c	0,997 c
c	c

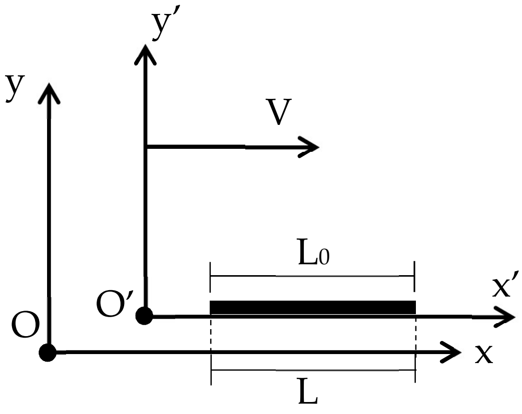
Tab. 5.2 La velocità v di un sistema che va a velocità v' rispetto a O', vista dal sistema O. Il sistema O' va a velocità V rispetto a O. La velocità v si mantiene sempre inferiore a c, a meno che una delle due velocità [v' o V] sia uguale a c.

E con questo abbiamo messo a posto il primo problema sperimentale: il risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley: la velocità della luce è una costante universale, non ha importanza chi la emetta e quale velocità abbia, io vedrò sempre un segnale che viaggia alla velocità della luce (nel vuoto), indipendentemente dalla direzione in cui è emessa. Questo fatto era stato posto come principio, ora abbiamo anche le relazioni che, legando spazi e tempi, permettono di calcolare cosa succede nella realtà e di fare le relative previsioni.

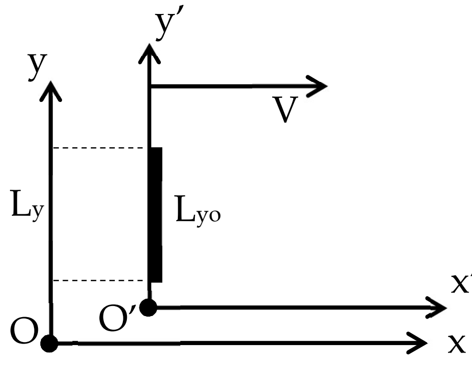
5.4.1. Contrazione delle lunghezze

Vediamo cosa succede ad un oggetto/evento visto da due sistemi di riferimento diversi, uno in moto con velocità costante rispetto all'altro.

Un oggetto di lunghezza L_0, in moto rispetto a un osservatore, è più corto – per l'osservatore - di quanto apparirebbe lo stesso oggetto ad un osservatore in quiete rispetto al medesimo. La contrazione delle lunghezze avviene lungo la direzione del moto, mentre rimangono invariate le dimensioni misurate in direzione perpendicolare al moto.



$L = L_0 / \gamma < L_0$



$L_y = L_{y0}$

Fig. 5.7 La contrazione delle lunghezze in direzione x, parallela alla velocità relativa fra l'osservatore e il sistema in esame: un righello a riposo nel sistema O'x'y' ha una lunghezza L_0. Lo stesso righello misurato dal sistema Oxy ha una lunghezza $L=L_0/\gamma < L_0$. Un righello posto in direzione dell'asse y, quindi perpendicolare alla velocità V, ha la stessa lunghezza nei due sistemi di riferimento.

Attenzione: questo è un grafico concettuale, le "scale" dei due assi x e x' sono diverse, e dipendono da chi le osserva, per questo "graficamente" $L=L_0$. Per i dettagli vedi il paragrafo 5.5 e seguenti.

Un osservatore solidale con l'oggetto non si accorge di subire una contrazione. Al contrario per tale osservatore è l'osservatore in moto a subire la stessa contrazione

Chiamiamo $\mathbf{L_0}$ la lunghezza di un oggetto misurata in un sistema di riferimento **O** a riposo rispetto all'oggetto, essa è detta "**lunghezza propria**". La lunghezza L dello stesso oggetto misurata da **O'** – in moto con velocità v rispetto ad O **-** è:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \le L_0 \qquad \text{NB: } \gamma \ge 1 \text{ quindi } L \le L_0$$

La lunghezza propria di un oggetto è la sua massima lunghezza misurabile. Essa è sempre maggiore di qualunque altra lunghezza che è possibile misurare per tale oggetto, (da un sistema di riferimento in moto rispetto ad esso).

5.4.2. Dilatazione dei tempi

Un orologio standard A, in moto rispetto ad un osservatore B – in moto rispetto ad A -, appare a questo

andare più lentamente di un identico orologio standard solidale con lo stesso osservatore.
Per un osservatore solidale all'orologio A è, viceversa, il tempo dell'osservatore B a rallentare.

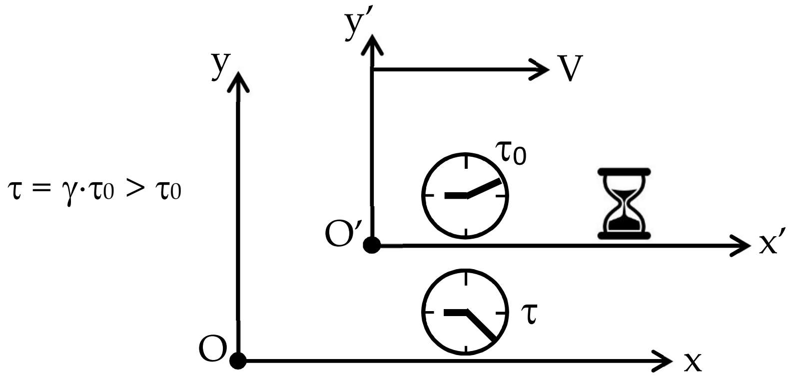


Fig. 5.8 La dilatazione dei tempi. Lo stesso evento (il tempo che ci mette tutta la sabbia a passare dalla parte superiore alla parte inferiore della clessidra) ha una durata differente se misurata nel sistema O', fermo rispetto alla clessidra, o nel sistema O, in moto rispetto alla clessidra. In O' misurerò τ_0 , mentre in O misurerò un valore $\tau > \tau_0$.

Chiamiamo $\boldsymbol{\tau_0}$ l'intervallo di tempo di un certo evento misurato da un orologio in un sistema di riferimento **O'** a riposo rispetto all'evento, il "**tempo proprio**". Lo stesso intervallo di tempo misurato con un orologio solidale con **O,** in moto rispetto ad O è:

$$\tau = \tau_0\gamma \geq \tau_0 \qquad \text{NB: } \gamma \geq 1 \text{ quindi } \tau \geq \tau_0$$

Il tempo proprio τ_0 è la minima durata misurabile per un evento. Esso è sempre minore di qualunque altra durata che è possibile misurare per tale evento (da un sistema di riferimento in moto rispetto ad esso).

5.4.3. Il significato della dilatazione/contrazione dei tempi e delle lunghezze. Perché la relatività speciale non l'ha fatta Lorentz.

Le trasformazioni dello spazio tempo che fanno passare da un sistema inerziale ad un altro sistema inerziale vengono chiamate le trasformazioni di Lorentz. Ci si chiede allora perché si dice che la relatività speciale è opera di A. Einstein, che nel suo lavoro non cita mai Lorentz. I punti sono due. Intanto Lorentz ha scritto le sue trasformazioni l'anno prima che le scrivesse Einstein, il quale non sapeva del lavoro di Lorentz, (altrimenti è molto probabile che l'avrebbe citato).

Ma la cosa essenziale è l'interpretazione che i due fisici hanno dato delle stesse trasformazioni. Secondo Lorentz la contrazione/dilatazione non era una modifica dello spazio/tempo, della metrica, ma erano gli oggetti stessi che fisicamente si contraevano, così come i tempi si dilatavano. Il fatto che queste contrazioni/dilatazioni fossero infinitesime portava al fatto che nessuno se ne accorgeva… ma veniva ipotizzata una modifica fisica intrinseca dell'oggetto. Se un essere vivente fosse potuto andare a velocità prossime a quelle della luce si sarebbe contratto e prima o poi sarebbe diventato una polpetta sanguinolenta…

Secondo Einstein invece non è l'oggetto in sé che si contrae o la durata di un evento che diventa maggiore. Un oggetto, che si trova nel suo sistema di riferimento, e che quindi è a riposo rispetto a sé stesso, non si accorge di nulla. Sono gli spazi ed i tempi che, secondo le trasformazioni di Lorentz, si contraggono e si dilatano, in funzione della velocità del sistema di riferimento che li sta *osservando*. Inoltre un altro osservatore, in un altro sistema di riferimento, misurerebbe altre lunghezze ed altri tempi. Questo porta a rendere difficile immaginare una modifica intrinseca del corpo/dell'evento come prevedeva Lorentz: rispetto a quale sistema dovrebbe variare visto che posso immaginare infiniti altri sistemi di riferimento, ognuno con una velocità diversa rispetto al sistema a riposo?

Quindi le formule sono le stesse, ma l'interpretazione è completamente diversa. Oggi sappiamo, da innumerevoli test e misure fatte nell'ultimo secolo, che l'interpretazione corretta è quella di Einstein.

5.4.4. Il mistero dei muoni

I muoni sono particelle con carica elettrica negativa uguale a quella degli elettroni, ma sono 200 volte più pesanti. I muoni sono prodotti nell'alta atmosfera a circa 15 Km dal suolo con una velocità molto vicina a quella della luce [v ≅ 99,92% c]. I muoni vivono pochissimo e decadono in altre particelle dopo un tempo τ_0=2,2 μs (in media[8]). La metà di essi raggiunge la superficie terrestre e attraversa il nostro corpo (circa 1000 al minuto).

Ma c'è un problema: che distanza percorrono prima di decadere? Il calcolo è facile:

$$\mathrm{d} = \mathrm{c} \cdot \tau_0 \cong 660 \text{ m}$$

Ora, l'atmosfera è spessa circa 15 km, i muoni decadono dopo aver percorso circa 600 metri. Come è possibile che circa la metà di essi arrivi sulla superficie terrestre?

Il fatto è che la vita media di 2,2 μs è quella misurata in un sistema a riposo. Ma per un osservatore che si trova sulla Terra, rispetto al quale i muoni viaggiano con velocità v, la vita media del muone appare dilatata di un fattore γ che nel caso dei muoni atmosferici [con v = 99,92% c], vale circa 25. Quindi per noi che ci troviamo sulla Terra e che li vediamo andare a velocità molto vicina a quella della luce i muoni hanno una vita media $\tau = \gamma \cdot \tau_0 = 25 \cdot 2{,}2\ \mu s = 55\ ms$. Quindi *per noi* i muoni possono attraversare una distanza:

$$\mathrm{d} = \mathrm{c} \cdot \tau \cong 15{,}5 \text{ km}$$

E quindi possono dunque attraversare i 15 km dell'atmosfera e raggiungere la terra!

Equivalentemente la distanza che devono percorrere, misurata dai muoni stessi, appare contratta del fattore gamma. Essi pertanto, dal loro punto di vista, vedono l'atmosfera spessa solo 15 Km / 25 ~ 600 m, quindi riescono ad attraversarla.

Dalla Terra si vede un muone con la vita più lunga, dal muone si vede l'atmosfera più corta. Il muone, che classicamente non potrebbe attraversare l'atmosfera, in realtà raggiunge la Terra, e può essere rivelato.

[88] Il decadimento di una particella non è un evento completamente deterministico. Per ogni particella ci sarà un tempo medio di decadimento, ma poi ci saranno particelle che decadono dopo un tempo più lungo ed altre che decadono dopo un tempo più breve. Data una particella non è possibile prevedere esattamente quando avverrà il decadimento anche se possiamo ipotizzare che la grandissima parte decadrà entro un certo intervallo intorno al valore medio del tempo di decadimento.

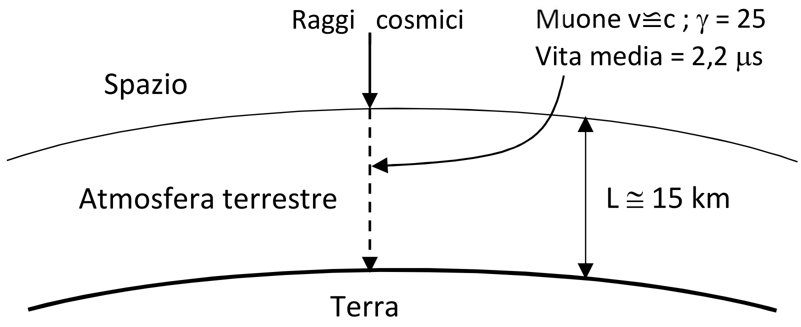


Fig. 5.9 Schema del decadimento dei muoni. Queste particelle vengono create nei primi strati dell'atmosfera con velocità molto vicina a quella della luce ($\gamma \cong 25$), e circa la metà di essi raggiunge la Terra, percorrendo circa 15 km.

La cosa importante è che *il fatto che avviene*, cioè che i muoni arrivano sulla terra, è unico e deve essere lo stesso per tutti gli osservatori. E la teoria spiega, cioè fornisce le formule che spiegano il fatto reale: che i muoni partono dall'inizio dell'atmosfera, e che arrivano sulla Terra. E questo fatto non è ambiguo, anche se gli spazi ed i tempi misurati dai veri osservatori sono differenti.

5.5. Lo spazio-tempo

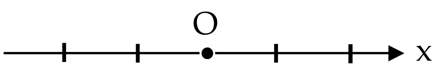
Uno dei problemi che si incontrano nella descrizione di cosa avviene in relatività, quindi in un mondo in cui spazio e tempo sono legati fra loro, è quello formale di fare i calcoli di eventi spazio-temporali in cui spazi e tempi sono legati fra di loro con le relazioni di Lorentz. C'è inoltre il problema *grafico* di come immaginarsi e/o disegnare quello che succede visualizzando il percorso spazio-temporale di uno o più eventi. Questo lavoro è stato fatto da Minkowski, legando la geometria alla descrizione matematica degli eventi. Qui ne daremo una versione semplificata, quasi esclusivamente grafica, per dare un'idea di come si possono descrivere eventi in uno spazio-tempo relativisitco.

5.5.1. Grafici spazio-temporali

Come prima cosa semplifichiamo il problema: lo spazio ha tre dimensioni, il tempo una, non è quindi pensabile di fare dei grafici "semplici" in quattro dimensioni. Quindi per ora consideriamo uno spazio molto semplice: uno spazio ad una dimensione, cioè una linea, una retta per il momento. Su di una retta posso fissare un'origine, una scala, e la posizione di un punto sarà data da un solo numero.

Introduciamo poi una seconda variabile: il tempo, disegnando un'altra retta perpendicolare alla retta della posizione. Anche per il tempo avrò un'origine (quando avrò fatto partire l'orologio che segna i tempi), e una scala.

A) L'asse del mio spazio unidimensionale. L'origine si trova in O e la posizione di un qualunque punto è indicata dalla coordinata x. Serve un solo numero per individuare la *posizione* di un punto.



B) Aggiungo un asse che indica il tempo. L'origine del tempo la metto in O (per comodità) e la posizione di qualunque punto su questo asse è indicata dalla coordinata t. Serve un solo numero per individuare il *tempo* in cui avviene un evento.

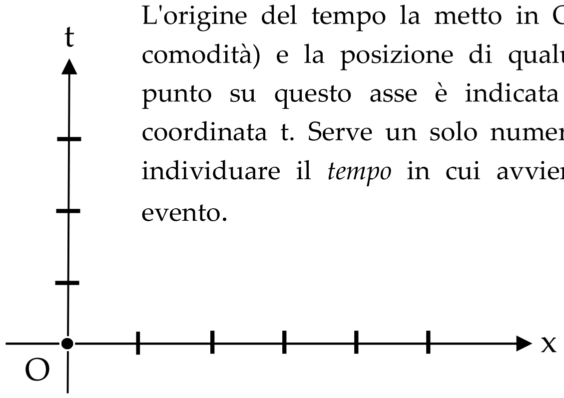


Fig. 5.10 A) Uno spazio ad una dimensione: si rappresenta con una linea, un'origine, e una scala, la x. B) L'asse del tempo, con origine in O, una direzione e la scala.

In Fig. 5.10 si può vedere come si costruisce uno spazio-tempo a due dimensioni. Abbiamo un'asse (l'asse x) che indica la posizione di un qualunque evento, e un asse (l'asse t) che indica il tempo in cui avviene un evento.

ATTENZIONE: nello spazio posso mettere un punto "fermo", cioè un punto che non si muove e che quindi rimane nella stessa posizione al passare del tempo. Per il tempo è diverso: non posso avere un evento fermo nel tempo. Quindi se disegno un punto è solo perché ho fatto una specie di istantanea ad un certo istante di tempo, fotografando la situazione in quel momento. In generale disegnerò delle linee nello spazio tempo: le *linee di universo*, che rappresentano la posizione di un punto al passare del tempo (vedi la Fig. 5.11).

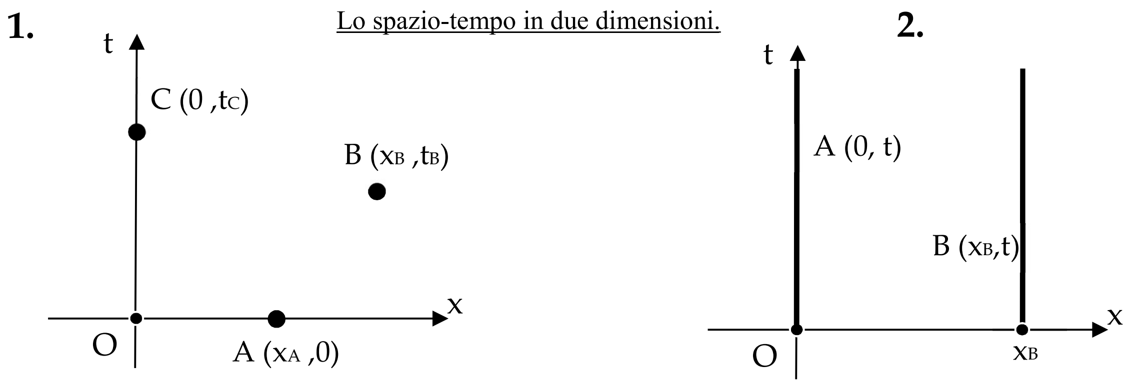
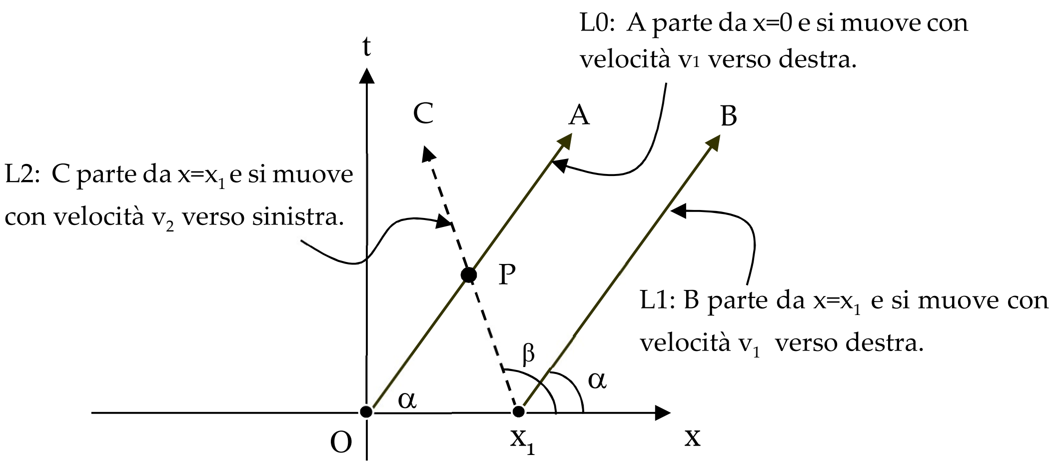


Fig. 5.11 **1.** Tre eventi: A, B, C che si trovano/avvengono in tre differenti punti dello spazio tempo. **2.** Due *linee di universo:* La linea del punto A che sta fermo nell'origine al tempo t=0 e rimane fermo. La linea del punto B che sta fermo nel punto x_B al tempo t=0 e rimane fermo. Entrambi i punti al passare del tempo percorrono l'asse t.

E ora vediamo come si disegnano nello spazio-tempo a due dimensioni degli oggetti in movimento. Intanto dobbiamo fissare un sistema di riferimento, sarà il sistema O,x,t che abbiamo disegnato nelle figure precedenti. Disegniamo poi tre linee di universo: L0, la linea di universo di un punto che parte dall'origine e si muove verso destra con velocità v_1, la linea L1 del punto B che all'istante iniziale si trovava nel punto x_1, e che all'istante 0 comincia a spostarsi verso destra con velocità v_1 (la stessa di L1). E la linea L2 del punto C che parte sempre da x_1 al tempo t=0, proseguendo poi con velocità v_2 verso sinistra. Dal grafico si vede che le due rette A e B sono parallele, i punti relativi non si incontreranno mai, infatti proseguono nel tempo con la stessa velocità nella stessa direzione. Mentre il punto C incontrerà il punto A in P.

Linee di universo di tre oggetti (A, B, C) con velocità differenti



5.5.2. Lo spazio-tempo di Minkowski

I grafici spazio-temporali del paragrafo precedente sono dei grafici disegnati con il buon senso, ma non sono adatti per una trattazione matematica completa in accordo con la relatività speciale. Il fatto di avere per esempio un asse con i tempi e un asse con le distanze porta al fatto che la distanza fra due punti qualsiasi sarà una grandezza che mischia variabili temporali e variabili spaziali. H. Minkowski nel 1908 crea una struttura matematica (quindi formalmente completa) per descrivere lo spazio-tempo della relatività speciale. E' uno spazio a quattro dimensioni, le tre dimensioni spaziali (x, y, z) e una dimensione temporale (ct). Il fatto di aver moltiplicato il tempo per la velocità della luce nel vuoto (costante) permette di poter *sommare o sottrarre* distanze spaziali e distanze temporali.

Una differenza fondamentale fra lo spazio-tempo euclideo e lo spazio-tempo di Minkowski è la definizione di *distanza* fra due punti.

In uno spazio euclideo, dati due eventi a riposo in un sistema inerziale, possiamo calcolare (misurare) la loro distanza temporale oppure la loro distanza spaziale. Queste due grandezze sono un'invariante, nel senso che non dipendono dal sistema di riferimento. La stessa cosa vale se considero un sistema in moto rispetto ad un altro sistema con velocità costante, le espressioni sarebbero un po' più complicate, ma il risultato sarebbe lo stesso: lo spazio (nel senso della lunghezza di un oggetto) e il tempo sono grandezze invarianti, non dipendono di chi li osserva.

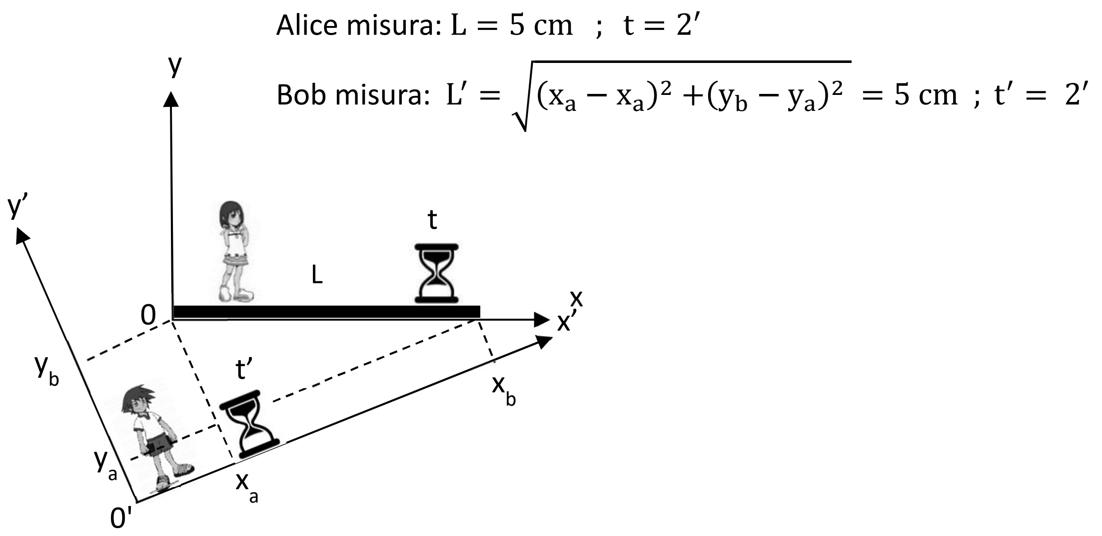


Fig. 5.13 In uno spazio tempo galileiano, descritto tramite la geometria euclidea, abbiamo spazi e tempi assoluti. La lunghezza del righello L e la durata del tempo di svuotamento della clessidra t non dipendono dal sistema di riferimento di chi li sta osservando. Questo vale anche se il sistema O si muove con velocità costante rispetto al sistema O', o viceversa.

Per esempio, in un sistema galileiano, quindi euclideo, potrò misurare un certo $dt = t_2 - t_1$ ed un certo $ds = x_2 - x_1$. Il tempo è assoluto, e la lunghezza, se l'oggetto è indeformabile, sarà costante. Questa distanza ds potrò scriverla anche in tre dimensioni, supponendo di trovarmi in uno spazio tridimensionale (O, x,y,z):

$$ds = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}$$

o anche: $ds^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

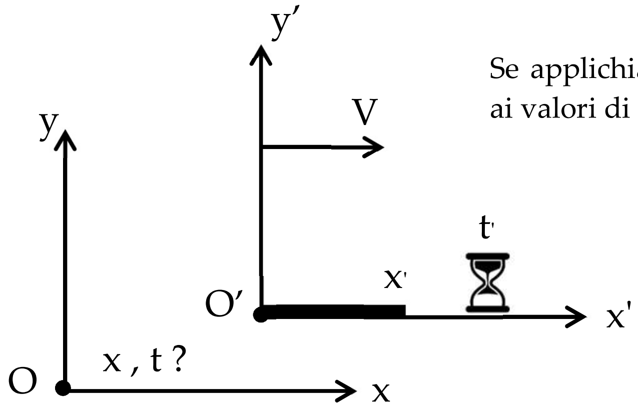
Nello spazio di Minkowski il tempo non è assoluto, sia l'intervallo spaziale ds che l'intervallo temporale saranno relativi, dipendendo dal sistema di riferimento che li osserva.

Tuttavia esiste una grandezza invariante, e questa è la distanza spazio-temporale fra due eventi, considerando gli eventi come facenti parte di uno spazio a quattro dimensioni: le tre spaziali (x, y, z) e quella temporale (t). Questa distanza, al quadrato, si scrive:

$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ un numero che può essere minore, maggiore o uguale a zero. Questa è la prima differenza formale con una distanza *standard* fra due punti nella geometria euclidea in cui questa distanza ds^2 fra due punti è un numero sempre maggiore o uguale a zero.

$$(ds')^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

$$ds^2 = c^2t^2 - x^2$$

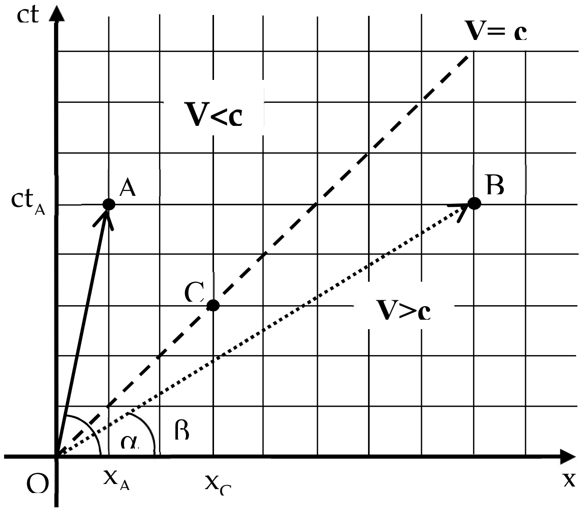


Se applichiamo le trasformazioni di Lorentz ai valori di x e di t si può vedere che:

$$ds^2 = (ds')^2$$

Fig. 5.14 Nello spazio-tempo relativistico, di Minkowski, spazi e tempi sono relativi, dipendono quindi da chi li sta osservando. Ma l'intervallo spazio-temporale ds^2, che contiene sia le distanze spaziali che le distanze temporali, è una grandezza invariante. Quindi, per uno stesso evento, assume lo stesso valore per tutti i sistemi di riferimento (inerziali) che lo osservino.

Vediamo come è fatto questo spazio-tempo (vedi Fig. 5.15): la prima caratteristica è la retta a 45^0 che parte dall'origine. Questa rappresenta la linea di universo di un segnale in cui $x = ct$, quindi con: $v = \frac{x}{t} = c$. La retta a 45^0 rappresenta quindi un segnale che va alla velocità c: può essere solo un segnale luminoso (un'onda elettromagnetica nel vuoto). Nello spazio al di sopra avrò dei punti raggiungibili da O da segnali con velocità $V<c$, mentre nello spazio inferiore avrò dei punti che per essere raggiunti da O dovrebbero poter essere collegati da segnali di velocità $> c$. Un segnale di questo tipo non può esistere. Quindi non può esistere una relazione causale fra i punti in questa zona e l'origine; vedremo meglio in seguito.



La velocità del linea OA è : $V_A = \frac{x_A}{t_A}$ o $\frac{V_A}{c} = \frac{x_A}{c \cdot t_A} = \frac{1}{\tan \alpha}$.

La linea OC, un segnale luminoso ha: $\frac{V_D}{c} = \frac{1}{\tan 45^0} = \frac{1}{1}$ da cui: $V_D = c$

Fig. 5.15 Uno spazio-tempo di Minkowski a due dimensioni: (x, ct). I punti della retta V=c, ad esempio il punto C, possono essere raggiunti da un segnale che parte dall'origine O solo se questo segnale ha la velocità della luce. I punti al di sopra della retta V=c, ad esempio A, possono essere raggiunti da segnali con velocità v<c che partono dall'origine O, quindi **può** esistere una relazione di causa effetto fra O e A. I punti al di sotto della retta v=c, ad esempio B, potrebbero essere raggiunti con segnali che partissero dall'origine ed aventi una velocità maggiore di quella della luce, che non può esistere.

Linee di universo possibili:

- **OA può** essere una linea di universo cha passa per O , perché v(OA) < c. In formule: $ct_1 = x_A$ tg α, quindi $x_A/ct_1 = v_A/c = 1/\text{tg}\ \alpha < 1$, cioè v<c.
- OB **non può** essere una linea di universo, perché v(OB) > c. In formule: $ct = x_B$ tg β, quindi $x_B/ct = v_B/c = 1/\text{tg}\ \beta > 1$, cioè v>c, e nessun segnale può andare da O a B.
- OC **può** essere una linea di universo, ma solo per segnali luminosi (fotoni) perché v(OD)=c. In formule: $ct = x_1$ tg 45^0, quindi $x/ct = v_D/c = 1/\text{tg}\ 45^0 = 1$, cioè v_D=c.

Fino ad ora abbiamo disegnato dei punti in un sistema di riferimento a riposo, il sistema (O, x, ct). Ma questo sistema non è molto differente da un qualunque sistema di riferimento galileiano, a parte il fatto che si parla di sistemi che potrebbero andare alla velocità della luce. E' sempre un sistema cartesiano, con gli assi ortogonali.
Vediamo ora come posso disegnare due sistemi di riferimento, uno a riposo, ed uno in moto rispetto al primo con velocità V.

Spazio tempo galileiano
t=t'; dx=dx'; c≠c'

Spazio-tempo di Minkowski:
c=c' ; dt≠dt'; dx≠dx'

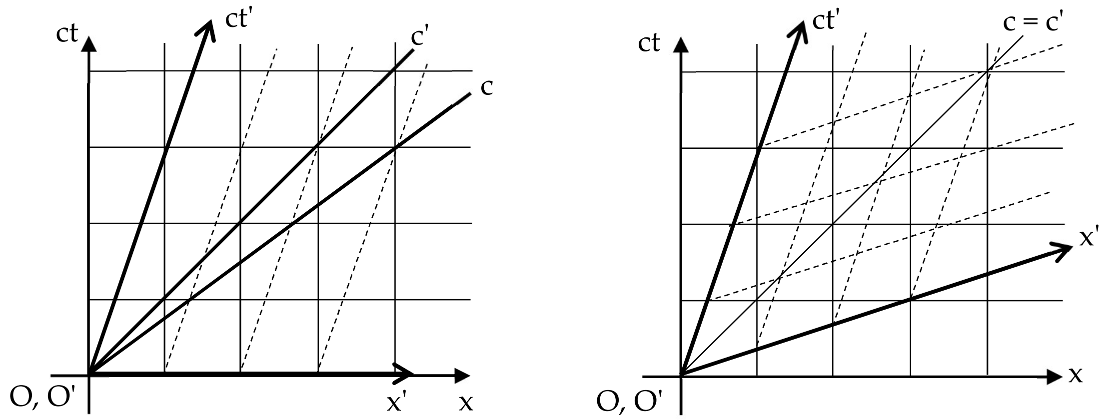


Fig. 5.16 Diagrammi spazio-temporali di due sistemi di riferimento (O, x, ct) ed (O', x', ct') in moto relativo uno rispetto all'altro con velocità costante. Secondo Galileo e secondo Minkowski. Per Galileo è il tempo ad essere universale, cioè lo stesso per tutti i sistemi di riferimento, per Minkowski (ed Einstein) è la velocità della luce ad essere una costante universale, indipendente quindi dal sistema di riferimento. La natura si comporta secondo lo spazio-tempo di Minkowski.

5.5.3. Il cono di luce

Con il termine cono di luce si intende usualmente una rappresentazione grafica dello spazio-tempo di Minkowski in cui si hanno due coordinate spaziali (x e y) ed una temporale (ct). In questo caso si può ancora fare un disegno bidimensionale, in prospettiva:

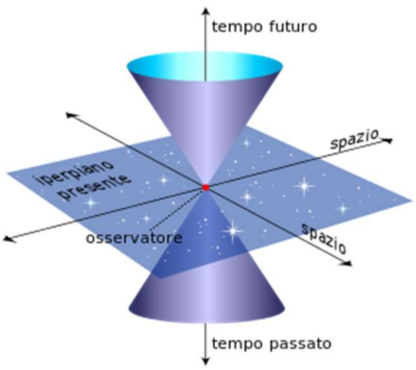


Fig. 5.17 Il cono di luce. Vengono disegnate due coordinate spaziali, il piano orizzontale che contiene la x e la y, e la coordinata verticale, il tempo. Le linee di universo corrispondenti alla velocità della luce formano un cono centrato nell'origine che divide lo spazio in tre parti distinte. Il passato: la parte interna del cono al di sotto dell'origine O. Ci si trovano tutti gli eventi che *possono* aver avuto una relazione di causa effetto con l'osservatore, è il passato assoluto. Poi c'è la parte interna al cono al di spora dell'origine O. Qui si trovano gli eventi che *potranno* avere una relazione di causa effetto con l'osservatore nell'origine. E' il futuro assoluto. Poi c'è la zona esterna al cono. In questa zona sono presenti eventi che non possono aver una relazione di causa effetto con l'osservatore in O: rappresentano il cosiddetto *altrove.*

Nella figura 5.17 si può vedere uno schema del cono di luce che separa lo spazio un tre zone: il passato assoluto, il futuro assoluto e l'altrove. La superficie conica è caratterizzata dall'avere una distanza spazio-temporale con l'origine $ds^2 = 0$, il passato ed il futuro assoluti avranno un $ds^2 < 0$, mentre l'altrove avrà un $ds^2 > 0$.

5.5.4. Problemi di casualità

Il fatto che spazi e tempi siano relativi può portare ad alcune stranezze che possono apparire illogiche o impossibili: l'indeterminazione dell'ordine temporale con cui avvengono alcuni eventi.

Vediamolo graficamente, in Fig. 5.18 abbiamo disegnato due griglie spazio-temporali, una per il sistema O,x,ct ed una per il sistema O',x',ct'. Consideriamo ora due eventi: l'evento 1 e l'evento 2 che avvengono in luoghi diversi e in tempi diversi. Si può vedere come la distorsione degli assi spazio-temporali porta al fatto che nel sistema O: $t_1 < t_2$ quindi l'evento 1 precede l'evento 2, mentre nel sistema O': $t_2 < t_1$.

Questo potrebbe sembrare assurdo: supponiamo che l'evento 1 fosse una persona A che spara ad una persona B, e l'evento 2 la persona B che muore avendo ricevuto la pallottola. Secondo quello che abbiamo detto potrei trovare un sistema di riferimento in cui prima A spara e poi B muore, ed un altro sistema in cui prima B muore e poi A spara. No, le cose non possono andare così. Vediamolo graficamente aiutandoci con i diagrammi spazio-temporali.

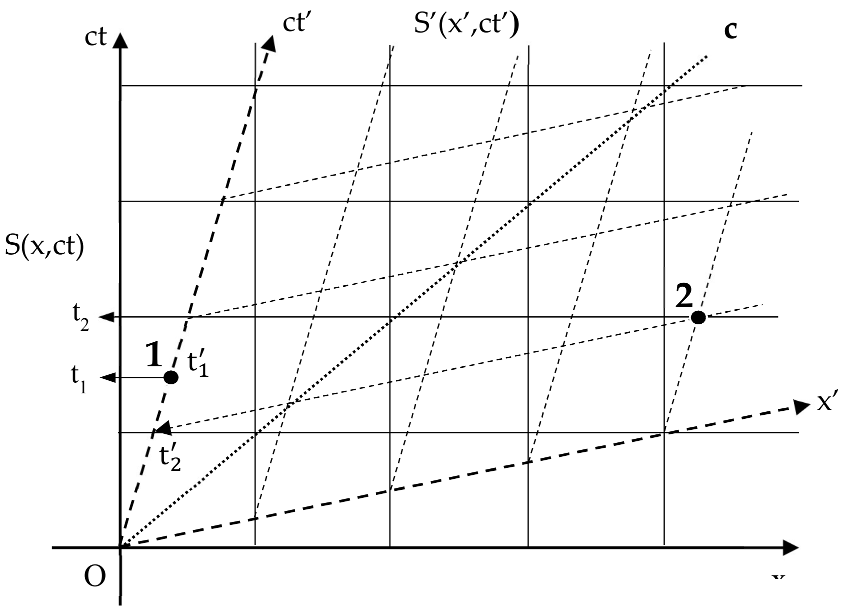


Fig. 5.18 Nel grafico si vedono due eventi (**1** e **2**) che avvengono in posti diversi ed in istanti diversi visti da due sistemi di riferimento, uno in moto rispetto all'altro (S e S'). Si vede che nel sistema S t_1 è minore di t_2, quindi l'evento 1 avviene prima dell'evento 2, mentre nel sistema S' si ha $t_2' < t_1'$ quindi un osservatore in S' vede avvenire prima l'evento 2 e poi l'evento 1. Se si suppone che ci sia un rapporto di causa-effetto fra l'evento 1 e l'evento 2 si ha un paradosso. In un sistema di riferimento un osservatore potrebbe vedere l'effetto prima della causa.

La soluzione al problema trova osservando la figura 5.19, in cui si vede che ognuno die due eventi 1 e 2 si trova al di fuori del cono di luce dell'altro, quindi nell'altrove dell'altro. In questa zona non può esserci nessuna relazione di causa-effetto, e quindi l'ordine temporale è ininfluente.

Nota : Gli eventi che si trovano nel mio «altrove» non possono avere una relazione di causa-effetto con me **ora**, questo perché una relazione richiederebbe una velocità maggiore di quella della luce, il che non è possibile. Essi possono essere visti nel mio passato o nel mio futuro a seconda di chi osserva.

Nello spazio-tempo einsteiniano l'ordine degli eventi non è più determinato in maniera assoluta (come era in meccanica classica) ma dipende dal sistema di riferimento.

Le interazioni tra i corpi, secondo la relatività, avvengono alla velocità della luce, e non istantaneamente, come previsto dalla meccanica classica. Perciò un evento ha bisogno di un certo tempo per entrare in relazione con un altro. L'ordine temporale degli eventi, osservati in un determinato sistema di riferimento, dipende perciò anche dalla loro distanza.

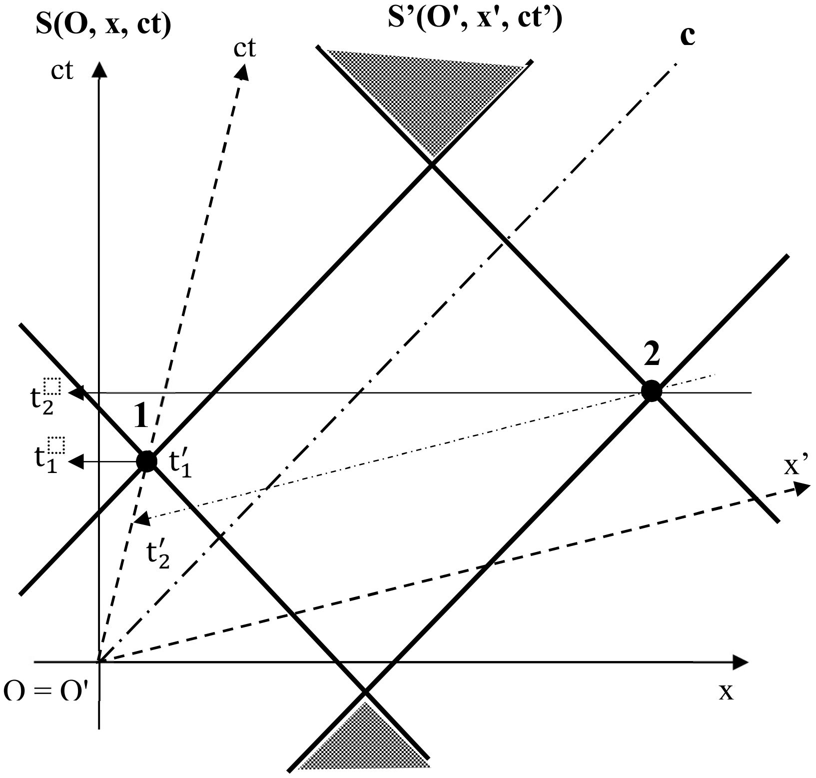


Fig. 5.18 La soluzione grafica al problema di causalità esposto nella figura 5.17. In questa figura abbiamo ridisegnato i due eventi **1** e **2** e i due sistemi di riferimento: il sistema O,x,y,ct ed il sistema O',x',y', ct' in moto rispetto al primo. Abbiamo poi disegnato i due coni di luce relativi all'evento **1** e all'evento **2** (linee continue in grassetto a 45^0). Si vede chiaramente che ogni evento si trova nell'*altrove* dell'altro: quindi non può esserci nessuna relazione di causa–effetto fra i due. Nell'altrove l'ordine temporale non è definito, ma questo non provoca nessun paradosso. Le zone ombreggiate invece sono le zone in comune a possibili eventi nel futuro o nel passato dei due eventi di partenza, con questi si potrebbero avere relazioni di causa-effetto.

Einstein ridefinisce quindi il concetto di simultaneità degli eventi. Due eventi possono risultare simultanei per un osservatore in un determinato sistema di riferimento e non simultanei per un altro che si trovi in un sistema di riferimento differente rispetto al primo.

5.5.5. Il paradosso dei gemelli

Il cosiddetto paradosso dei gemelli è un esperimento mentale che sembra rivelare una contraddizione nella teoria della relatività speciale. Tale contraddizione, in ultima analisi, risulta inesistente.

Ecco come viene usualmente posto il problema:

Un uomo e una donna sono due gemelli che hanno la stessa età. L'uomo sta sulla Terra. La donna parte per un viaggio con velocità γ = 10, e torna dopo t_0= 1 anno, sul suo orologio. Per l'uomo il tempo passato è t = γ t_0= 10 anni.

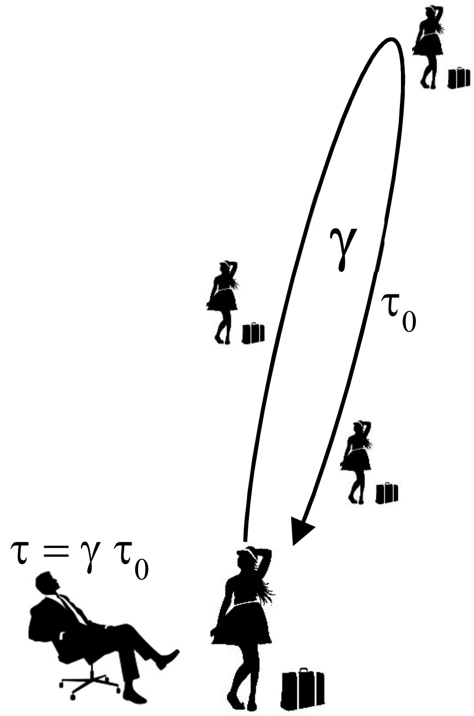
Quindi l'uomo è 10 anni più vecchio, mentre la donna solo 1 anno più vecchia.

Ma, nel sistema di riferimento della donna, è l'uomo che ha fatto il viaggio con velocità γ, quindi la donna vede il tempo dell'uomo dilatato di γt, ed è lei ad essere più vecchia di lui. Quindi chi sarà più vecchio alla fine del viaggio?

Soluzione del paradosso:

In realtà i due sistemi **non sono equivalenti.** L'uomo sta fermo, è quindi un sistema inerziale, mentre la donna in almeno tre punti [partenza, inversione della velocità, arrivo] cambia la velocità, DEVE accelerare, quindi il suo non è un sistema inerziale e non posso scrivere banalmente le relazioni relativistiche.

Quello che succede in realtà è che alla fine è l'uomo ad essere più vecchio. Ed è stato anche misurato utilizzando satelliti ed aerei molto veloci: ovviamente le cose tornano come previsto dalla relatività.



5.6. La velocità della luce nel vuoto, è veramente la massima velocità possibile, ma non raggiungibile per un corpo di massa a riposo diversa da zero?

Nei paragrafi precedenti (5.4.1) abbiamo stabilito che non è possibile arrivare ad una velocità maggiore di quella della luce nel vuoto (c), sommando le velocità.

Ma forse è possibile accelerare un corpo di massa m ad una velocità maggiore di quella della luce. Basta fornirgli abbastanza energia. Questo esperimento è stato fatto, ecco come:

1. Faccio passare degli elettroni attraverso una differenza di potenziale ΔV: gli elettroni acquisteranno un'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = q\,\Delta V$. dove q ed m sono rispettivamente la carica e la massa dell'elettrone, e v la sua velocità rispetto al sistema di riferimento del laboratorio.

2. Poi faccio passare gli elettroni attraverso una zona senza nessun campo elettrico o magnetico, dove quindi non ci saranno forze su di loro, e misuro la loro velocità v.

3. A questo punto li faccio sbattere contro un pezzo di Alluminio. Gli elettroni si fermeranno dentro l'Alluminio, cedendo tutta la loro energia all'Alluminio, che si riscalderà aumentando al sua temperatura di un certo ΔT. Da questo aumento di temperatura potrò misurare l'energia E_c che avevano degli elettroni, infatti $\frac{1}{2}mv^2 = C\Delta T$ dove C è la capacità termica del pezzo di Alluminio.

Quindi dall'esperimento, variando la differenza di potenziale ΔV applicata agli elettroni, posso misurare delle coppie di valori (velocità, Energia), oppure (velocità^2 , Energia). Queste due grandezze, secondo la teoria della meccanica classica, dovrebbero essere legate dalla relazione $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ quindi facendo un grafico della velocità al quadrato e dell'Energia cinetica dovrei avere:

$v^2 = \frac{2}{m} E_c = k E_c$ quindi, se m è una costante, il grafico di v^2 in funzione di E_c dovrebbe essere una retta di coefficiente angolare k=2/m. Non è così, in Fig.5.18 si può vedere il risultato della misura fatta[9]:

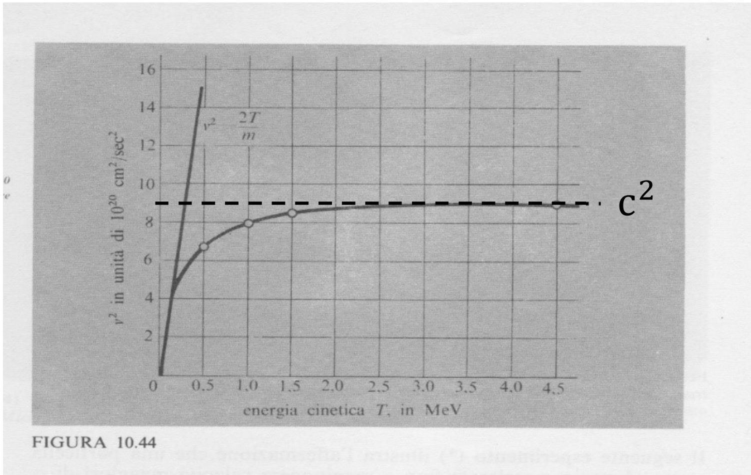


Fig. 5.18 Grafico delle misure della (velocità degli elettroni)² in verticale, in funzione della loro energia cinetica. La meccanica classica prevede una relazione lineare fra v^2 ed E_c, è la retta leggermente inclinata. I circoletti sono i punti sperimentali. Si vede come la meccanica classica non sia rispettata, mentre appare chiaro che mentre l'Energia degli elettroni aumenta, la loro velocità non supera mai il valore di c.

Quindi la velocità dell'elettrone non aumenta mai oltre la velocità della luce nel vuoto, in realtà non ci arriva neppure… ma ci va molto vicino. D'altronde la sua energia aumenta… E quindi? Lo vedremo nel paragrafo successivo.

5.7. La soluzione di Einstein: E = m c²

Fino ad ora si è parlato di Spazio e di Tempo, ma cosa succede alla massa di un corpo? Come influisce la relatività sulla massa? Nel settembre del 1905 Einstein pubblica un altro articolo: *L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?*[10]. In questo articolo Einstein fa *semplicemente* un calcolo:

I risultati della precedente ricerca [Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, ndr] conducono ad una conclusione molto interessante che viene ricavata in quanto segue:

[…]

Se un corpo perde l'energia ΔE sotto forma di radiazioni, la sua massa diminuisce di ΔE/c². Il fatto che l'energia sottratta al corpo diventi energia di radiazione non fa alcuna differenza, perciò siamo portati alla più generale conclusione che ***la massa di qualunque corpo è la misura del suo contenuto di energia****; se l'energia varia di ΔE, la massa varia nello stesso senso di ΔE/9·10²⁰, misurando l'energia in erg e la massa in grammi. Non è impossibile che nei corpi nei quali il contenuto in energia sia variabile in sommo grado (per esempio nei sali di radio) la teoria possa essere sperimentata con successo*[11].

Quindi: $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ ovvero: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ o: $E = mc^2$

[9] Questo tipo di misura è stato ripetuto varie volte, vedi per esempio: W. Bertozzi, *Am. J. Phys.* 32, 551 (1964).

[10] A. Einstein, Annalen der Physik, 17, 1905. Traduzione in italiano in E. Bellone, *La relatività da Faraday a Einstein*, Loescher, 1981, pag. 200-204.

[11] In queste righe, per rendere il testo più leggibile, sono stati cambiati i simboli delle grandezze utilizzati da Einstein nell'articolo originale.

Cosa vuol dire, e come si inserisce questa relazione nell'ambito della Relatività? Abbiamo visto che le lunghezze e gli intervalli di tempo dipendono dal sistema di riferimento, cioè dalla velocità di chi li osserva rispetto agli oggetti stessi. Ma la massa? Cosa vuol dire che l'energia dipende dalla massa?

Nota: L'energia non è un invariante…neanche per Galileo…$E_c = \frac{1}{2} mv^2$

Stiamo parlando della massa ''inerziale'', quella che entra nel secondo principio della dinamica [F=ma], la quantità legata alla quantità di «materia» di un corpo.

Per essere coerente con il resto della teoria l'Energia legata alla massa ed al suo movimento va scritta così: $E \equiv m_0\, c^2\gamma$ e, dato che c è costante, sarà la massa ad essere relativa al sistema rispetto a cui la misuro, il suo valore dipende quindi dal fattore γ come il tempo:

$m(v) = \gamma \cdot m_0 \geq m_0$

m_0 è la cosiddetta ''massa a riposo'', quella misurata in un sistema in cui il corpo di massa **m** è in quiete.

Cosa vuol dire che $m(v) = \gamma \cdot m_0 \geq m_0$?

Ricordiamo che il fattore gamma γ ci dice quanto stiamo andando veloci rispetto al sistema che stiamo osservando:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, e che il fattore **γ** è praticamente uguale a 1 per tutte le velocità ''piccole'' rispetto alla velocità della luce, mentre diventa sensibile solo quando ci si avvicina ad essa.

Quindi nel mondo in cui viviamo, per corpi «macroscopici», γ è quasi sempre 1, e le masse cambiano di quantità molto molto piccole.

L'energia di un corpo in movimento:

Riscriviamo la formula di Einstein $E = m\, c^2 = m_0\, c^2\gamma$

Possiamo fare un calcolo **per velocità «piccole»,** cioè per v<<c scrivendo una relazione approssimata per il fattore γ, valida solo per v<<c

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots}$$

L'energia potrò quindi scriverla come: $E = m_0\, c^2\gamma \cong m_0\, c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots\right)$ dove i puntini (…) indicano altri termini molto piccoli rispetto ai precedenti.

Si ha: $E \cong m_0\, c^2 + m_0\, c^2 \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = m_0\, c^2 + \frac{1}{2} m_0\, v^2 = E_0 + E_c$

L'energia di un corpo è quindi composta di più termini, uno costante (è l'energia a riposo) ed uno che non è altro che la «vecchia» energia cinetica della meccanica classica.

Riassumendo: (per velocità «piccole» v<<c)

$$E \cong m_0\, c^2 + \frac{1}{2} m_0\, v^2 = E_0 + E_c$$

Un corpo ha sempre un'energia $E_0 = m_0 c^2$, anche se sta fermo,...se lo rompo…se riesco a convertire in energia una parte della sua massa ottengo un'energia molto grande:

Per esempio se avessi 1 kg di ^{238}U… e lo convertissi in Energia termica (con l'efficienza dello 0,1%), potrei ottenere un'energia elettrica (con efficienza del 33%) :

- m (1kg ^{238}U) → $E_0 = m_0\, c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ J

Conversione in di una parte della massa in Calore

→ [η=0,1%] E_c (Calore)= $9 \cdot 10^{13}$ J

Conversione della quantità di Calore in energia Elettrica → [η=0,33%]

E_e (Energia Elettrica) ~ $3 \cdot 10^{13}$ J

Questa Energia corrisponde per esempio a:

~ 1'000 famiglie che consumano 1kW per 24 ore al giorno, per un anno.

oppure:

~ 24’000 famiglie che consumano 1kW per 1 ora al giorno, per un anno.

Dall’aumento della massa con la velocità deriva in modo naturale che un corpo con una massa diversa da zero non può mai arrivare alla velocità della luce.

Se ho un corpo e voglio «accelerarlo», cioè aumentare la sua velocità, devo fornirgli un’energia proporzionale alla sua massa e al quadrato della sua velocità: $E = \frac{1}{2} m v^2$; ma quando il corpo accelera, la sua velocità aumenta…la sua massa anche, e l’energia necessaria diventa

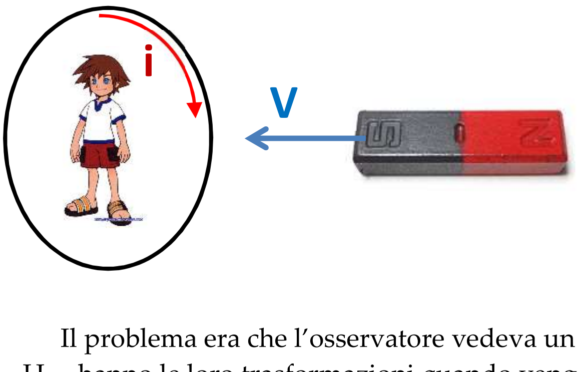
$E = \frac{1}{2} m_0 \gamma v^2$ … c’è il famoso fattore gamma che diventa sempre più grande… alla velocità della luce sarebbe infinito, e sarebbe quindi infinita l’energia necessaria per accelerare il corpo…non ce la farò mai, né io, né nessun altro sistema fisico.

Prima del 1905 esistevano due leggi (o princìpi) di conservazione ben distinte e separate: la legge di conservazione della massa, scoperta da Lavoisier, e la legge di conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica), alla cui scoperta hanno contribuito, nella seconda metà del 1800, diversi scienziati (Joule, Carnot, Thomson, Clausius e Faraday): “nulla si crea e nulla si distrugge, ma tutto si trasforma”. Einstein ha unificato le due leggi in un unico principio di conservazione, che coinvolge unitariamente tutti i processi fisici di trasformazione della massa in energia e viceversa, dato che l'una può trasformarsi nell'altra secondo una esattissima relazione matematica. Ciò che resta sempre costante nell'universo è la somma di massa ed energia. Con Einstein è nato, quindi, il principio di conservazione della massa-energia.

8. Conclusioni

8.1. Che fine hanno fatto le asimmetrie magneti/spire?

1. L’osservatore è solidale con la spira:



1) Muovo il magnete rispetto alla spira: nella spira passa una corrente **i**

$$i = \frac{f}{R}; \quad f = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

Il problema era che l’osservatore vedeva un campo magnetico in movimento: ma anche i campi E, B, D, H….hanno le loro trasformazioni quando vengono visti da un sistema in moto rispetto a loro:

$E_{y,z} = \gamma\left[E'_{y,z} \pm V_x B'_{z,y}\right]$ quindi il campo B viene visto come un campo elettrico (a riposo)

$B_{y,z} = \gamma\left[B'_{y,z} \mp \frac{V_x}{c^2} E'_{z,y}\right]$ …+ un campo magnetico (a riposo). E tutto torna.

8.2. Grandezze invarianti in tutti i sistemi inerziali

Sembra che tutto sia relativo…è vero, ma ci sono molte grandezze invarianti in tutti i sistemi inerziali, oppure che sono una caratteristica intrinseca del corpo se misurate in un sistema in cui il corpo è a riposo.

Ecco un elenco delle più importanti grandezze invarianti o che hanno valore definito in un sistema di rrifeoirmnto a riposo.

- La velocità della luce nel vuoto è una costante universale: **c=299 792 458 m/s** (esatta).
- L'intervallo spazio-temporale: $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ (sostituisce l'invarianza di dx e dt).
- La lunghezza $\mathbf{L_0}$ di un oggetto: la lunghezza di un oggetto misurato in un sistema in cui l'oggetto è a riposo è $\mathbf{L_0}$ **ed è la massima** lunghezza fra tutte quelle che qualunque osservatore può misurare.
- La durata $\mathbf{t_0}$ di un evento: la durata di un evento misurata in un sistema in cui l'evento è a riposo è $\mathbf{t_0}$ **ed è la minima** durata fra tutte quelle che qualunque osservatore può misurare.
- La massa $\mathbf{m_0}$ di un corpo: la massa di un corpo misurata in un sistema in cui il corpo è a riposo è $\mathbf{m_0}$ **ed è la più piccola** massa fra tutte quelle che qualunque osservatore può misurare.
- La combinazione Energia-impulso: $\mathbf{E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4}$
- La carica elettrica.